LES EXTR@S DU C2P1

Biomaths N°2

Les extr@s sont un outil pédagogique vous permettant de revoir vos cours à travers les points essentiels et les questions que vous vous posez le plus couramment. Les explications sont dispensées par les RM et leur équipe.

Les extr@s sont une aide dans votre apprentissage voire compréhension des différents cours, mais en aucun cas un substitut à vos cours magistraux ou TD.

Il vous est conseillé de consulter ce document après votre cours magistral afin d'éclaircir les concepts les plus flous et vérifier votre assimilation des notions de bases.

Si des questions persistent, n'hésitez pas à aller sur le forum :

http://www.ampcfusion.com

Cercle Cartésien des PAES – C2P1
Bureau T203 ∗ 45, rue des Saints-Pères 75006 Paris
Local TP15 ∗ 4, avenue de l'Observatoire 75006 Paris
01 42 86 40 59 ∗ contact@c2p1.fr ∗ http://c2p1.fr

Equations différentielles

I) Vocabulaire et définitions

- **Equation différentielle :** c'est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées.

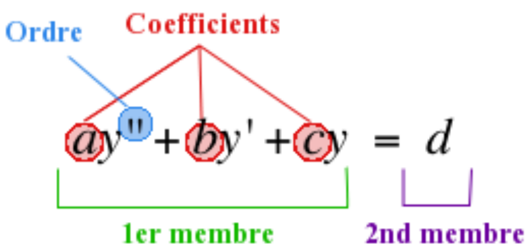
- **Ordre :** il correspond à l'ordre *n* maximal de dérivation contenu dans l'équation.
  - ordre 1 : $ay'+by=c$ (contient la dérivée première)
  - ordre 2 : $ay''+by'+cy=d$ (contient la dérivée seconde)

  ATTENTION : On parle d'ordre pour les équations différentielles, alors qu'on parle de degré pour les polynômes.

- **Linéaire:** une équation différentielle est linéaire si elle contient la fonction *y* et ses dérivées (*y'*…) seulement sous une forme « additive », et pas sous la forme de produits ou quotients (puissance, etc.)
  - linéaire : $2y'-xy=3\cos x$
  - non linéaire : $y'+2y^2=3$ *(car il y a un carré de la fonction y)*

- **Coefficients:** ce sont les facteurs devant la fonction *y* et ses dérivées (*y'* …)
  Ils peuvent être constants ou variables.
  - à coefficients constants : $5y'+10y=x$
  - à coefficients variables : $3xy'-x^2y=6$

- **Membres :** Le 1er membre (habituellement à gauche) contient la fonction *y* et ses dérivées. Le 2nd membre (habituellement à droite) les autres termes (constantes et/ou variables).
  - sans second membre : $y'+5y=0$
  - avec second membre : $2y'-3y=x+5$



<u>Exemples (réponses à la fin de l'extr@ p.13)</u>
- $5y''-3xy=4$
- $-xy'+x^3y=e^x$
- $y'y+2y=0$
- $8y'=3x-1$

II) Equation différentielle linéaire du 1er ordre

1) Principe général

Une équation différentielle linéaire du 1er ordre est du type : $\boxed{a(x)y' + b(x)y = c(x)}$

Où $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des variables ou des constantes.

- **1ère étape : recherche de la SGESSM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **S**ans **S**econd **M**embre) **nommée y_0**

On cherche y_0 tel que : $\boxed{a(x)y_0' + b(x)y_0 = 0}$

- **2ème étape : recherche de la SPEASM** (= **S**olution **P**articulière de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée Y**

On cherche Y tel que : $\boxed{a(x)Y' + b(x)Y = c(x)}$

- **3ème étape : recherche de la SGEASM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée y**

On cherche y tel que : $\boxed{y = y_0 + Y}$

2) Equation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants

Elle est du type : $\boxed{ay' + by = c(x)}$ où a et b sont des constantes.

On prendra comme exemple l'équation différentielle suivante : $6y' - y = 2e^{3x}$

- **1ère étape : recherche de la SGESSM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **S**ans **S**econd **M**embre) **nommée y_0**

On cherche y_0 tel que : $\boxed{ay_0' + by_0 = 0}$

  - solution intuitive = formule de Terminale

$$ay_0' + by_0 = 0 \Leftrightarrow y_0' = -\frac{b}{a}y_0$$

Nous connaissons la solution de cette équation différentielle : $y_0(x) = Ke^{-\frac{b}{a}x}$

- solution par séparation de variables

$$ay_0'+by_0=0 \Leftrightarrow a\frac{dy_0}{dx}+by_0=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0}=-\frac{b}{a}dx$$ *on met les termes en y_0 d'un côté, et les autres termes de l'autre.*

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy_0}{y_0}=\int-\frac{b}{a}dx$$ *on intègre*

$$\Leftrightarrow \ln\left[y_0(x)\right]=-\frac{b}{a}x+Cste$$

$$\Leftrightarrow y_0(x)=Ke^{-\frac{b}{a}x}$$

<u>Exemple :</u> $6y'-y=2e^{3x}$

On cherche y_0 tel que : $6y_0'-y_0=0$

Donc $y_0'=\frac{1}{6}y_0$.

Ainsi : $y_0=Ke^{\frac{1}{6}x}$

- **2ème étape : recherche de la SPEASM** (= **S**olution **P**articulière de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée *Y***

On cherche *Y* tel que : $\boxed{aY+bY=c(x)}$

Comme les coefficients sont constants, on passe par la **méthode par identification**.

On utilise sa méthode quand le second membre *c*(*x*) est une fonction « remarquable » :
- un polynôme de degré *n* : de forme $ax^n+bx^{n-1}+...+cx+d=0$
- exponentielle : de forme ke^{ax}
- cosinus ou sinus : de forme $\lambda\cos(\alpha x)+\mu\sin(\beta x)$
- des combinaisons simples de ces fonctions : somme, produit…

On pose Y alors de même type que le second membre *c*(*x*), puis on identifie.

<u>Exemple :</u> $6y'-y=2e^{3x}$

On cherche Y tel que : $6Y'-Y=e^{3x}$

On pose Y de même type que le second membre : $Y = \lambda e^{\alpha x}$
On dérive Y : $Y' = \lambda \alpha e^{\alpha x}$

On remplace dans l'équation différentielle : $6\lambda\alpha e^{\alpha x} - \lambda e^{\alpha x} = 2e^{3x} \Leftrightarrow \lambda(6\alpha - 1)e^{\alpha x} = 2e^{3x}$

Donc par identification : $\begin{cases} \alpha = 3 \\ \lambda(6\alpha - 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \lambda = \dfrac{2}{17} \end{cases}$

$$\text{Ainsi : } Y = \frac{2}{17}e^{3x}$$

- **3ème étape : recherche de la SGEASM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée *y***

On cherche y tel que : $\boxed{y = y_0 + Y}$

De plus, on cherche K grâce aux conditions initiales.

<u>Exemple :</u> $6y' - y = 2e^{3x}$

On trouve : $y(x) = Ke^{\frac{1}{6}x} + \dfrac{2}{17}e^{3x}$
On donne $y(0) = 1$
Donc $K + \dfrac{2}{17} = 1 \Rightarrow K = \dfrac{15}{17}$

$$\text{Ainsi : } y(x) = \frac{15}{17}e^{\frac{1}{6}x} + \frac{2}{17}e^{3x}$$

3) Equation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients variables

Elle est du type : $\boxed{a(x)y'+b(x)y=c(x)}$ où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ sont des variables.

On prendra comme exemple l'équation différentielle suivante :

- **1ère étape : recherche de la SGESSM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **S**ans **S**econd **M**embre) **nommée y_0**

On cherche y_0 tel que : $\boxed{a(x)y_0'+b(x)y_0=0}$

- solution intuitive

$$a(x)y_0'+b(x)y_0=0 \Leftrightarrow y_0'=-\frac{b(x)}{a(x)}y_0$$

Nous connaissons la solution de cette équation différentielle : $y_0(x)=K\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$

- solution par séparation de variables

$$a(x)y_0'+b(x)y_0=0 \Leftrightarrow a(x)\frac{dy_0}{dx}+b(x)y_0=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0}=-\frac{b(x)}{a(x)}dx$$ *on met les termes en y_0 d'un côté, et les autres termes de l'autre.*

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy_0}{y_0}=\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx$$ *on intègre*

$$\Leftrightarrow \ln[y_0(x)])=\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx+Cste$$

$$\Leftrightarrow y_0(x)=K\exp\left(\int -\frac{b(x)}{a(x)}dx\right)$$

Exemple : $3y'-2xy=-2x$

On cherche y_0 tel que : $3y_0'-2xy_0=0$

$$3y_0' - 2xy_0 = 0 \Leftrightarrow 3\frac{dy_0}{dx} = 2xy_0$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy_0}{y_0} = \frac{2}{3}xdx$$
$$\Leftrightarrow \int \frac{dy_0}{y_0} = \int \frac{2}{3}x\,dx$$
$$\Leftrightarrow \ln y_0 = \frac{x^2}{3} + Cste$$
$$\Leftrightarrow y_0 = Ke^{\frac{x^2}{3}}$$

Ainsi : $y_0 = Ke^{\frac{x^2}{3}}$

- **2ème étape : recherche de la SGEASM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée *y***

On cherche y tel que : $\boxed{a(x)y + b(x)y = c(x)}$

Comme les coefficients ne sont pas constants, on passe par la **méthode de variation de la constante (de Lagrange)**.

On reprend la SGESSM et on remplace la constante K par une variable $K(x)$.

Exemple : $3y' - 2xy = -2x$

On pose y de même type que la SPESSM : $y = K(x)e^{\frac{x^2}{3}}$

On dérive y : $y' = K'(x)e^{\frac{x^2}{3}} + \frac{2}{3}xK(x)e^{\frac{x^2}{3}}$

On remplace dans l'équation différentielle : $3\left(K'(x)e^{\frac{x^2}{3}} + \frac{2}{3}xK(x)e^{\frac{x^2}{3}}\right) - 2xK(x)e^{\frac{x^2}{3}} = -2x$

Donc $3K'(x)e^{\frac{x^2}{3}} = -2x$

NB : On remarque que le terme en K(x) est systématiquement éliminé dans la méthode de Lagrange.

$3K'(x)e^{\frac{x^2}{3}} = -2x \Leftrightarrow dK = -\frac{2}{3}x\,e^{-\frac{x^2}{3}}dx$ *on sépare les variables (terme en K à gauche, termes en x à droite)*

$\Leftrightarrow \int dK = \int -\frac{2}{3}x\,e^{-\frac{x^2}{3}}dx$ *on intègre des deux côtés*

On s'occupe d'abord de l'intégrale de droite. On effectue un changement de variable.

Soit $u(x) = -\frac{x^2}{3}$

$\frac{du}{dx} = -\frac{2}{3}x$ donc $dx = -\frac{3}{2x}du$

$$\int -\frac{2}{3}x e^{-\frac{x^2}{3}} dx = \int e^u du = e^u + Cste1 = e^{-\frac{x^2}{3}} + Cste1$$

Donc on obtient $K(x) + Cste2 = e^{-\frac{x^2}{3}} + Cste1 \Leftrightarrow K(x) = e^{-\frac{x^2}{3}} + A$

$$\text{Ainsi : } y = \left(e^{-\frac{x^2}{3}} + A\right)e^{\frac{x^2}{3}} = 1 + Ae^{\frac{x^2}{3}}$$

On cherche A avec les conditions initiales.

ATTENTION : Dans la méthode de Lagrange, on trouve directement la solution GENERALE de l'équation avec second membre, donc la solution finale de l'équation. Pas besoin d'additionner avec y_0.

III) Equation différentielle linéaire du 2ème ordre

1) Principe général

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre est du type :

$$\boxed{a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)}$$

Où $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ ou $d(x)$ sont des variables ou des constantes.

- **1ère étape : recherche de la SGESSM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **S**ans **S**econd **M**embre) **nommée y_0**

On cherche y_0 tel que : $\boxed{a(x)y_0'' + b(x)y_0' + c(x)y_0 = 0}$

- **2ème étape : recherche de la SPEASM** (= **S**olution **P**articulière de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée Y**

On cherche Y tel que : $\boxed{a(x)Y'' + b(x)Y' + c(x)Y = d(x)}$

- **3ème étape : recherche de la SGEASM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée y**

On cherche y tel que : $\boxed{y = y_0 + Y}$

2) Equation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants

Elle est du type : $\boxed{ay''+by'+cy=d(x)}$ où a, b, c sont des constantes.

- **1ère étape : recherche de la SGESSM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **S**ans **S**econd **M**embre) **nommée y_0**

On cherche y_0 tel que : $\boxed{ay_0''+by_0'+cy_0=0}$

On remplace l'équation sans second membre par son *équation caractéristique (EC)*:

$ar^2+br+c=0$ où a, b, et c sont les mêmes coefficients que l'équation initiale

NB : Concrètement on remplace « y » par « r », et les degrés de dérivations de y par les puissances de r.

On cherche les solutions de cette équation caractéristique.

On commence par le calcul de **Δ = b² - 4ac**

si Δ > 0	**si Δ = 0**	**si Δ < 0**
(EC) admet deux racines r_1 et r_2	(EC) admet une racine r	(EC) n'admet pas de racine réelle
$y_0=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$	$y_0=e^{rx}(A+Bx)$	$y_0=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$

<u>**Exemple**</u> : $y''-y'-6y=6x+3$

On cherche y_0 tel que : $y_0''-y_0'-6y_0=0$

L'équation caractéristique associée est : $r^2-r-6=0$

<u>Calcul de Δ</u>

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-6)=1+24=25>0$ donc $\sqrt{\Delta}=5$

<u>Calcul des racines r_1 et r_2</u>

$r_1=\dfrac{1+5}{2}=3$ et $r_2=\dfrac{1-5}{2}=-2$

Ainsi: $y_0=Ae^{3x}+Be^{-2x}$

- **2ème étape : recherche de la SPEASM** (= **S**olution **P**articulière de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée *Y***

On cherche Y tel que : $\boxed{aY''+bY'+cY=d(x)}$

Comme les coefficients sont constants, on utilise la **méthode par identification. (**cf paragraphe II – 2 – 2ème étape)

On pose Y alors de même type que le second membre $d(x)$, puis on identifie.

Exemple : $y''-y'-6y=x+3$

On cherche Y tel que : $\boxed{Y''-Y'-6Y=6x+3}$

On pose Y de même type que le second membre : $Y=\alpha x+\beta$
On dérive Y (dérivée première et seconde) : $Y'=\alpha$ et $Y''=0$

On remplace dans l'équation différentielle :
$-\alpha-6(\alpha x+\beta)=6x+3 \Leftrightarrow -6\alpha x-6\beta-\alpha=6x+3$

Donc par identification : $\begin{cases}-6\alpha=6\\-\alpha-6\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Ainsi : $Y=-x-\dfrac{1}{3}$

- **3ème étape : recherche de la SGEASM** (= **S**olution **G**énérale de l'**E**quation **A**vec **S**econd **M**embre) **nommée *y***

On cherche *y* tel que : $\boxed{y=y_0+Y}$
On trouve les 2 constantes A et B (de la SGESSM) grâce aux conditions initiales.

Exemple : $y''-y'-6y=x+3$

On cherche y tel que : $\boxed{y=y_0+Y}$
Donc: $y=Ae^{3x}+Be^{-2x}-x-\dfrac{1}{3}$

On donne : $\begin{cases}y(0)=\dfrac{5}{3}\\ y\left(-\dfrac{1}{3}\right)=e^{-1}+e^{\frac{2}{3}}\end{cases}$

$\begin{cases}A+B-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}\\ Ae^{-1}+Be^{\frac{2}{3}}=e^{-1}+e^{\frac{2}{3}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A=1\\B=1\end{cases}$

Ainsi : $y(x)=e^{3x}+e^{-2x}-x-\dfrac{1}{3}$

IV) Système d'équations du 1er ordre

Un système d'équations du 1er ordre est de type :

$$\boxed{\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}}$$

Si les coefficients b et c sont négatifs, alors $x(t)$ et $y(t)$ sont en relation de **compétition**.
Si les coefficients b et c sont positifs, alors $x(t)$ et $y(t)$ sont en relation de **symbiose**.

- **1ère étape : Trouver une équation différentielle d'ordre 2 en $x(t)$**

Astuce : calculer la dérivée seconde de $x(t)$ en fonction de $y(t)$, puis éliminer le terme en $y(t)$ grâce à la première équation.

Exemple : $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$

On calcule la dérivée seconde de $x(t)$: $x''(t) = -5x'(t) + 2y'(t) = -5x'(t) + 4x(t) - 4y(t)$
Or $2y(t) = x'(t) + 5x(t)$
Donc $x''(t) = -5x'(t) + 4x(t) - 2x'(t) - 10x(t)$

On obtient l'équation différentielle d'ordre 2 suivante :

$$\boxed{x''(t) + 7x'(t) + 6x(t) = 0}$$

NB : Les coefficients b et c sont positifs ➔ x(t) et y(t) sont en relation de symbiose.

- **2ème étape : Résoudre l'équation différentielle d'ordre 2 en $x(t)$**

Pour cela, on se réfère au paragraphe III-2 sur la résolution d'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Exemple : $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$

Notre équation différentielle d'ordre 2 est sans second membre.

On cherche donc l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle d'ordre 2 trouvée précédemment :

$$r^2 + 7r + 6 = 0$$

<u>Calcul de **Δ**</u>
$\Delta = 7^2 - 4 \times 1 \times 6 = 49 - 24 = 25 > 0$ donc $\sqrt{\Delta} = 5$

Calcul des racines r_1 et r_2

$r_1 = \dfrac{-7+5}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{-7-5}{2} = -6$

Ainsi: $x(t) = Ae^{-t} + Be^{-6t}$

- **3ème étape : Trouver l'expression de *y*(*t*)**

Exemple : $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$

$y(t) = \dfrac{x'(t) + 5x(t)}{2}$

Or $x(t) = Ae^{-t} + Be^{-6t}$ et $x'(t) = -Ae^{-t} - 6Be^{-6t}$

Donc $y(t) = \dfrac{-Ae^{-t} - 6Be^{-6t} + 5Ae^{-t} + 5Be^{-6t}}{2} = 2Ae^{-t} - \dfrac{B}{2}e^{-6t}$

- **4ème étape : Trouver A et B grâce aux conditions initiales**

Exemple : $\begin{cases} x'(t) = -5x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) - 2y(t) \end{cases}$

On donne $x(0) = 1$ et $y(0) = \dfrac{3}{4}$

Donc $\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - \dfrac{B}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 - A \\ 8A - 2 + 2A = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{1}{2} \\ A = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

On obtient finalement : $x(t) = \dfrac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{-6t}\right)$ et $y(t) = e^{-t} - \dfrac{1}{4}e^{-6t}$

Correction des exemples de la partie Vocabulaire

- $5y''-3xy=4$: ordre 2, linéaire, à coefficients variables, avec 2nd membre (constant).
- $-xy'+x^3y=e^x$: ordre 1, linéaire, à coefficients variables, avec 2nd membre (variable).
- $y'y+2y=0$: non linéaire
- $8y'=3x-1$: ordre 1, linéaire, à coefficients constants, avec 2nd membre (variable).